

## Varianta 83

### SUBIECTUL I

- a)  $AB = \sqrt{10}$ .
- b)  $S = \frac{11}{2}$ .
- c)  $\cos^2 x = 1$ .
- d)  $a = 3, b = -15$
- e)  $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .
- f)  $BC = 10$ .

### SUBIECTUL II

1.

a) Există două funcții cu proprietatea dată.

b)  $p = \frac{4}{5}$ .

c)  $x = 0$ .

d)  $S_{11} = 187$ .

e)  $g(f(-1)) = 0$

2.

a)  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$ .

c)  $x=0$  este asimptotă verticală.

d)  $\int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{2} - \ln 2$ .

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = 1$ .

### SUBIECTUL III

a)  $f(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ .

b) Aplicăm relațiile lui Viète sau calcul direct.

c) Calcul direct sau  $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - (-1)x - 3 = f(x)$ .

- d)  $f(x) \cdot f(x+1) \stackrel{b)}{=} (x-x_1)(x-x_2)(x+1-x_1)(x+1-x_2) \stackrel{c)}{=} (x^2+2x-3-x_1)(x^2+2x-3-x_2) = f(x^2+2x-3), \forall x \in \mathbf{R}.$
- e)  $f(-1-x) \stackrel{b)}{=} (-1-x-x_1)(-1-x-x_2) \stackrel{c)}{=} (x_2-x)(x_1-x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$
- f) Din  $f(n) > 1, \forall n \geq 2$  și  $f(n^2+2n-3) = f(n) \cdot f(n+1) \Rightarrow f(n^2+2n-3)$  nu e prim pentru  $\forall n > 1$ . Rezultă că mulțimea conține o infinitate de numere care nu sunt prime, deci cel puțin 2006.
- g) Folosind d) avem că:  $f(2005)f(2006) = f(2005^2+2 \cdot 2005-3) \stackrel{not}{=} n$  și  $f(2006)f(2007) = f(2006^2+2 \cdot 2006-3) \stackrel{not}{=} m \Rightarrow m$  și  $n$  se divid cu  $f(2006)$ . Cum  $f(n) > 1, \forall n \geq 2$  rezultă că  $f(2005)f(2006) > f(2006)$ . Deci  $n > f(2006)$ . Analog  $m > f(2006)$ . Numerele căutate sunt  $m$  și  $n$ .

#### SUBIECTUL IV

- a) Calculăm  $x^2-1 + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^4-1+1}{x^2+1} = \frac{x^4}{x^2+1} = f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$
- b)  $f'(x) = 2x - \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^4+2x^2)}{(x^2+1)^2}, \forall x \in \mathbf{R}.$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -1 + \frac{1}{x^2+1} \right) = -1.$
- d)  $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, \infty) \Rightarrow f$  este crescătoare pe  $[0, \infty)$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^2+1} = \infty \Rightarrow$  funcția  $f$  nu admite asimptotă orizontală spre  $+\infty$ .  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^3+x} = \infty \Rightarrow$  funcția  $f$  nu admite asimptotă oblică spre  $+\infty$ .
- f)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$
- g) Deoarece  $\int_0^{\frac{1}{n}} (f(x) - x^2 + 1) dx = \arctg \frac{1}{n}$ , atunci limita cerută este  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \arctg \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$